INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE
ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES STATISTICIENS ÉCONOMISTES À L'ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE.

Mai 1975. — Option MATHÉMATIQUES

TROISIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 2 heures

Sont autorisés à cette épreuve les documents suivants :

a. *Tables de logarithmes;*

b. *Tables de Flavien, Hennequin et Laborde;*

c. *Règles et cercles à calcul.*

N. B. — 1° Les deux problèmes sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Il est toutefois signalé que le premier est plus court que le second.

2° Le candidat prendra garde au fait que le corps de base est celui des nombres réels dans le premier problème et celui des nombres complexes dans le second.

3° Le candidat indiquera en tête de sa copie la ou les tables numériques utilisées.

4° On rappelle que la relation entre nombres réels :

$$y = \operatorname{Arcsin} x ,$$

équivaut à :

$$x = \sin y \qquad \text{et} \qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2} .$$

5° On rappelle la méthode suivante de résolution de l'équation du troisième degré à coefficients réels p, q et à inconnue t :

$$t^3 + pt + q = 0 ,$$

dans le cas où $4p^3 + 27q^2 < 0$.

Le changement d'inconnue :

$$t = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos\theta$$

permet de mettre l'équation sous la forme :

$$\cos 3\theta = \cos \Phi ,$$

où Φ est l'un des réels vérifiant la condition :

$$\frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{-p}} = \cos \Phi ,$$

et la résolution de l'équation $\cos 3\theta = \cos \Phi$ est immédiate; elle conduit, pour l'équation du troisième degré en t, à trois racines réelles et distinctes.

PROBLÈME I

On considère l'équation à inconnue réelle x :

$$\text{(E)} \qquad \operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} .$$

1° Montrer le plus simplement possible que (E) admet une racine unique, notée x_0, et que :

$$0 < x_0 < \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

2° Résoudre (E), c'est-à-dire déterminer une expression de x_0 par radicaux carrés.

3° Calculer, à partir de l'expression précédente, une valeur décimale approchée de x_0, avec la précision permise par l'emploi des tables de logarithmes à cinq décimales (ou par l'emploi de toute autre table susceptible de donner des résultats équivalents).

4° Calculer, avec la même précision, des valeurs décimales approchées de $\operatorname{Arcsin} x_0$ et de $\operatorname{Arcsin} \frac{x_0}{2}$, puis de la somme

$$\left(\operatorname{Arcsin} x_0 + \operatorname{Arcsin} \frac{x_0}{2} \right) ,$$

et la comparer à $\frac{\pi}{4}$.

PROBLÈME II

On considère l'équation à inconnue complexe z :

(E′) $$4 \cos^3 z + 27 \sin^2 z = 0 .$$

On se propose de déterminer numériquement toutes les racines de (E′) vérifiant la condition supplémentaire $|z| \leqslant 3$.

1° Que devient (E′) si l'on pose $\cos z = \frac{1}{t}$? Soit (E″) l'équation obtenue. Résoudre (E″), avec la précision permise par l'emploi des tables, par la méthode indiquée dans le paragraphe 5° du préambule. Les trois racines, réelles, de (E″) notées t_1, t_2, t_3, avec $t_1 < t_2 < t_3$, seront, dans toute la suite du problème, remplacées par les valeurs décimales approchées obtenues ici.

2° Déterminer, avec la même précision, des valeurs décimales approchées de $\frac{1}{t_1}, \frac{1}{t_2}, \frac{1}{t_3}$.

3° Déterminer, avec la même précision, des valeurs décimales approchées des racines de (E′) vérifiant :

$$\cos z = \frac{1}{t_1} \qquad \text{et} \qquad |z| \leqslant 3 .$$

4° Déterminer de même des valeurs décimales approchées des racines de (E′) vérifiant :

$$\cos z = \frac{1}{t_2} \qquad \text{et} \qquad |z| \leqslant 3 .$$

5° Déterminer enfin des valeurs décimales approchées des racines de (E′) vérifiant :

$$\cos z = \frac{1}{t_3} \qquad \text{et} \qquad |z| \leqslant 3 .$$

6° Quelle est la forme générale de l'ensemble des racines de (E′) ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail